A

1	2	3	4	Nota
R	B	B	B	8,5

APELLIDO Y NOMBRE N° DE LIBRET

CARRERA: Lic. en Cs. de la Computación.

TURNO: 9 a 14hs. A-K ☐ 9 a 14hs. L-Z ☐ 14 a 19hs. ☐ 17 a 22hs. ☒

Álgebra I

Primer Cuatrimestre 2024 - Segundo Recuperatorio del **Segundo** parcial - 19/07/2024

Ejercicio 1. Sea $b \in \mathbb{Z}$ tal que $(b^{163} + 18^{2100} + 54 : 616) = 77$. Calcular el resto de dividir a b por 154.

Ejercicio 2. Sean $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ y $\omega = e^{\frac{3}{38}\pi i}$.
Determinar todos los $m \in \mathbb{Z}$ tales que

$$z^{10m} = \omega^{4m+8}.$$

Ejercicio 3. Sean $f = X^5 + X^3 + X$ y $g = X^5 + X^4 + X^2 + X \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]$.
Calcular $(f : g)$ y dar su factorización como producto de polinomios irreducibles mónicos en $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]$.

Ejercicio 4. Hallar todos los $a \in \mathbb{Q}$ tales que

$$f = 3X^4 + (-4a+1)X^3 - (a+1)X^2 - 3X + 11a^2$$

tiene a a como raíz doble. Para el o los valores de a hallados, factorizar f en producto de irreducibles mónicos en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$.

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen.

Justifique todas sus respuestas.

① Sea $b \in \mathbb{Z}$ tq. Calcular $r_{154}(b)$

$$(b^{163} + 18^{2100} + 54 : 616) = 77 = 11.7 \iff$$

Por def de mcd:

$$\iff \begin{cases} 77 \mid b^{163} + 18^{2100} + 54 \iff b^{163} + 18^{2100} + 54 \equiv 0\ (7.11) \\ 77 \mid 616 \checkmark \\ y\ 2 \nmid b^{163} + 18^{2400} + 54 \end{cases}$$

No!

$$\underset{7 \perp 11}{\iff} \begin{cases} b^{163} + 18^{2100} + 54 \equiv 0\ (7) & ① \\ b^{163} + 18^{2100} + 54 \equiv 0\ (11) & ② \end{cases}$$

- Veamos que mas info nos pueden dar éstas ecuaciones

de ①:

$$b^{163} + \underset{\equiv 4 (7)}{18}^{2100} + \underset{\equiv 2 (7)}{54} \equiv 0\ (7) \iff$$

$54 \equiv -2(7)$

$$\iff (b^7)^{23} . b^2 + 4^{2100} + 2 \equiv 0\ (7)$$

$$\underset{\text{PTF 1)}}{\iff} b^{23} . b^2 + \underbrace{(4^6)}_{\equiv 1 (7)}{}^{350} + 2 \equiv 0 (7)$$

$$\iff b^{24} . b^4 + 1^{350} + 2 \equiv 0 (7)$$

como $7 \nmid 4$, uso PTF 2)

$$\iff (b^7)^3 . b^4 + 1 + 2 \equiv 0 (7)$$

$$\underset{\text{por PTF 1)}}{\iff} b^3 . b^4 + 3 \equiv 0 (7)$$

$$\iff b^7 \equiv -3 (7) \underset{\text{uso PTF 1)}}{\iff} \boxed{b \equiv 4 (7)}$$

Error de cuenta

Rdo. PTF:
- Sea $a \in \mathbb{Z}$ y p primo:

1) $a^p \equiv a (p)$

2) si $p \nmid a$: $a^{p-1} \equiv 1 \ (p)$

C. Auxs

$163 = 7.23 + 2$

$2100 = 6.350$

de ②:

$2100 = 10.210$

$163 = 14.11 + 9$

$$b^{163} + \underset{\equiv 7 (11)}{18}^{2100} + \underset{\equiv 10 (11)}{54} \equiv 0 (11) \iff$$

como $11 \nmid 7$, uso PTF 2) y luego PTF 1)

$$\iff (b^{11})^{14} . b^9 + (7^{10})^{210} + 10 \equiv 0 (11)$$

~~$\iff b^{14} . b^9$~~

$$\iff b^{14} . b^9 + \overbrace{1^{210} + 10}^{= 11 \equiv 0 (11)} \equiv 0 (11)$$

uso PTF 1)

$$\iff b^{23} \equiv 0 (11) \iff b^{11} . b^{11} . b^1 \equiv 0 (11) \iff b.b.b \equiv 0 (11)$$

$\Leftrightarrow b^3 \equiv 0(11)$ Yo quiero obtener info acerca de b, no de b^3, ent. armo una tabla de restos.

$\Leftrightarrow b \equiv 0(11)$ pues 11 es primo !

$r_{11}(b)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$r_{11}(b^3)$	0	1	8	5	9	4	7	2	6	3	10

De acá observo que $b^3 \equiv 0(11) \Leftrightarrow \boxed{b \equiv 0(11)}$

Ahora mi sistema quedó:
$$S: \begin{cases} b \equiv 4(7) \\ b \equiv 0(11) \end{cases}$$
La resuelvo.

Por TCR, S tiene sol y es única tal que
$$b \equiv b_0 \ (7.11) \quad \text{con } 0 \le b_0 < 77$$

- $b \equiv 0(11) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ b = 11k$

Pero yo quiero que simultáneamente, $b \equiv 4(7)$

Entonces $11k \equiv 4(7) \Leftrightarrow$
$$\Leftrightarrow 4k \equiv 4(7)$$
$$\underset{2\perp 7}{\Leftrightarrow} 8k \equiv 8(7) \Leftrightarrow k \equiv 1(7)$$
$$\Updownarrow$$
$$\exists j \in \mathbb{Z},\ \underline{k = 1+7j} \ ⊛$$

Reemplazo ⊛ en $b = 11k$
$$b = 11(1+7j)$$
$$b = 11 + 77j \Leftrightarrow \boxed{b \equiv 11\ (77)}$$

Pero yo lo quería ver módulo $2.77 = 154 = 2.7.11$

~~mult. toda la expresión por 2:~~ No!

~~$2b = 22 + 154j \Leftrightarrow 2b \equiv 22(154)$~~

No, pues para que el mcd sea 77 además $2 \nmid b^{163} + 18^{2100} + 54$

Me quedó que $b \equiv 11 (77)$ pero para q' aparezca

$$b \equiv \bigcirc \ (154) \overset{7 \perp 2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} b \equiv 11 \ (77) \\ b \equiv a \ (2) \end{cases}$$

a puede ser 1 ó 0.

Si $b \equiv 0(2) \Rightarrow (0^{163} + \underbrace{18}_{\equiv 0(2)}{}^{2100} + \underbrace{54}_{\equiv 0(2)} : 616) \overset{?}{=} 77$

$(0 : 616) = 616$ $\cancel{(0 : 616) \neq 77}$ ~~Absurdo~~

Si $b \equiv 1(2) \Rightarrow (b^{163} + \underbrace{18}_{\equiv 0(2)}{}^{2100} + \underbrace{54}_{\equiv 0(2)} : 616)$

$(1^{163} : 616) =$

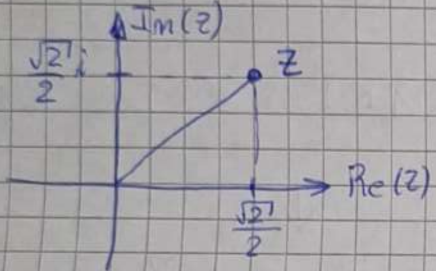
No concluye

(2) Sean $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i \qquad w = e^{\frac{3\pi}{38} i}$

Determinar $m \in \mathbb{Z}$ tq:

$$z^{10m} = w^{4m+8}$$

1°) Tengo q' llevar a z a la forma polar, a trigonométrica



$$z = r \cdot e^{\theta i}$$

$$z = |z| \cdot e^{\theta i} = e^{\theta i}$$

$$\boxed{\theta = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}} = 45°$$

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{2}{4}} = \sqrt{1} = 1$$

$$\Rightarrow z = e^{\frac{\pi}{4} i}$$

$$z^{10m} = w^{4m+8} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[e^{\frac{\pi}{4} i}\right]^{10m} = \left[e^{\frac{3}{38}\pi i}\right]^{4m+8} \Leftrightarrow e^{\left(\frac{\pi}{4} i\right) 10m} = e^{\left(\frac{3}{38}\pi i\right)(4m+8)}$$

dos complejos $z_1 \wedge z_2$ son iguales sii son iguales en módulo y ángulo con un desfase de $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$\Leftrightarrow 10\frac{\cancel{\pi}}{4} \cdot m = (4m+8)\left(\frac{3}{38}\cancel{\pi}\right) + 2k\cancel{\pi} \Leftrightarrow$$

Ambos módulos valen uno

$$\Leftrightarrow \frac{5}{2} m = 4m \cdot \frac{3}{38} + 8 \cdot \frac{3}{38} + 2k$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{2} m = \frac{6}{19} m + \frac{12}{19} + 2k$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{2} m - \frac{6}{19} m = \frac{12}{19} + 2k$$

$\Leftrightarrow \frac{83}{38} m = \frac{12}{19} + 2K$

multiplico
m. a m.
por 38

$\Leftrightarrow 83 m = 38 \cdot \frac{12}{19} + 38 (2K)$

$\Leftrightarrow 83 m = 24 + 76 K$

$\Leftrightarrow 83 m \equiv 24 \ (76)$

$\Leftrightarrow 7 m \equiv 24 \ (76)$

$\underset{11 \perp 76}{\Leftrightarrow} 11 . (7m) \equiv 11 . (24) \quad (76)$

$\Leftrightarrow \underbrace{77}_{\equiv 1 \ (76)} m \equiv \underbrace{264}_{\equiv 36 \ (76)} \ (76) \Leftrightarrow \boxed{m \equiv 36 \ (76)}$

$\downarrow$

los $m \in \mathbb{Z}$ q' cumplen $z^{10m} = w^{4m+8}$ están dados por dicha congruencia.

B

③ $f = x^5 + x^3 + x \quad \wedge \quad g = x^5 + x^4 + x^2 + x \quad \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[x]$

$(f:g) = ?$

Aplicando el Algoritmo de Euclides, voy a llegar a hallar el mcd.

$$\begin{array}{l|l} \cancel{x^5} + x^3 + x & x^5 + x^4 + x^2 + x \\ -\underline{\cancel{x^5} + x^4 + x^2 + x} & 1 \\ -x^4 + x^3 - x^2 = r_1 & \end{array}$$

$$\underbrace{x^5 + x^3 + x}_{f} = \overbrace{(x^5 + x^4 + x^2 + x)}^{g} \cdot \overbrace{1}^{q_1} + \overbrace{\underbrace{(-x^4 + x^3 - x^2)}_{= x^4 + x^3 + x^2}}^{r_1}$$

pues $\overline{-1} = \overline{1}$

$(f:g) = (g:r_1)$

$$\begin{array}{l|l} \cancel{x^5} + \cancel{x^4} + x^2 + x & x^4 + x^3 + x^2 \\ -\underline{\cancel{x^5} + \cancel{x^4} + x^3} & x \\ -x^3 + x^2 + x = x^3 + x^2 + x = r_2 & \end{array}$$

$$\underbrace{x^5 + x^4 + x^2 + x}_{g} = \underbrace{(x^4 + x^3 + x^2)}_{r_1} \cdot \underbrace{x}_{q_2} + \overbrace{(x^3 + x^2 + x)}^{r_2}$$

$(f:g) = (g:r_1) = (r_1:r_2)$

$$\begin{array}{l|l} x^4 + x^3 + x^2 & x^3 + x^2 + x \\ -\underline{x^4 + x^3 + x^2} & x \\ \cancel{0} & \end{array}$$

$$\underbrace{x^4 + x^3 + x^2}_{r_1} = \underbrace{(x^3 + x^2 + x)}_{r_2} \cdot \underbrace{x}_{q_3} + \overbrace{0}^{r_3}$$

$$\boxed{(f:g) = (g:r_1) = (r_1:r_2) = (r_2:0) \underset{\downarrow}{=} r_2 = \underline{\overline{x^3 + x^2 + x}}}$$

por propiedad del mcd.

$h = (f \cdot g) = x^3 + x^2 + x$

$h = x\,\underbrace{(x^2+x+1)}_{t}$

- t no tiene raíces en $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$\left(\text{pues } t(0) = \bar{1} \;\wedge\; t(1) = \bar{3} = \bar{1} \right)$
y es de grado 2, por lo tanto es irreducible en $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

- Luego x es un pol. de grado 1 por lo cual también es irreducible.

$\therefore$ Entonces, podemos afirmar que:

$$h = x\,(x^2+x+1)$$

es la factorización de h en polinomios mónicos irreducibles en $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[x]$.

Bien

Concluyo que $a = 3$ es raíz doble de f. ✓

Reemplazo:

~~$f = 3x^4 + (-4.3+1).x^3 + (3+1)$~~

$$f = 3x^4 + (-4.3+1).x^3 - (3+1)x^2 - 3x + 11.3^2$$

$$f = 3x^4 - 11x^3 - 4x^2 - 3x + 99$$

y yo sé que por ser $a = 3$ raíz doble $\Rightarrow (x-3)^2 \mid f$

$\boxed{(x-3)^2 = x^2 - 6x + 9}$ c. aux.

$$\begin{array}{l|l}
3x^4 - 11x^3 - 4x^2 - 3x + 99 & x^2 - 6x + 9 \\ \cline{2-2}
-(3x^4 - 18x^3 + 27x^2) & 3x^2 + 7x + 11 \\ \cline{1-1}
 7x^3 - 31x^2 - 3x + 99 & \\
-(7x^3 - 42x^2 + 63x) & \\ \cline{1-1}
 11x^2 - 66x + 99 & \\
-(11x^2 - 66x + 99) & \\ \cline{1-1}
 0 &
\end{array}$$

$$f = (x^2 - 6x + 9)(3x^2 + 7x + 11)$$

$$f = (x-3)^2 \underbrace{(3x^2 + 7x + 11)}_{g}$$

Calculo las raíces de g: $\alpha_{+,-} = \dfrac{-b + w}{2.a} = \dfrac{-7 \pm w}{6}$

con $w^2 = b^2 - 4.a.c = 7^2 - 4.3.11$

$w^2 = -83$

$\Rightarrow \boxed{w = \pm\sqrt{83}\, i}$

Pues $w^2 = (\pm\sqrt{83}\, i)^2$

$w^2 = \cancel{\sqrt{83}}^{\cancel{2}}\, i^2$

$\boxed{w^2 = -83}$

$$\alpha_{+,-} = \frac{-7 \pm \sqrt{83}\, i}{6}$$

$$= 3 \cdot \left(x^2 + \frac{7}{3}x + \frac{11}{3}\right)$$

$$f = (x-3)^2 \cdot \overbrace{(3x^2 + 7x + 11)}$$

siendo $\alpha = \frac{-7 + \sqrt{83}\,i}{6}$ $\wedge$ $\overline{\alpha} = \frac{-7 - \sqrt{83}\,i}{6}$

$$f = 3(x-3)^2 \cdot (x-\alpha)(x-\overline{\alpha})$$

es la factorización de f en irreducibles mónicos para $f \in \mathbb{C}[x]$ pues tengo 4 polinomios de grado 1. (si contamos a $(x-3)^2 = (x-3)\cdot(x-3)$)

~~[illegible]~~

$$f = 3(x-3)^2\left(x^2 + \frac{7}{3}x + \frac{11}{3}\right)$$

es la factorización de f en irreducibles mónicos para $f \in \mathbb{Q}[x] \subseteq \mathbb{R}[x]$.

~~[illegible]~~

irreducible por ser dos polinomios de grado 1 ~~[illegible]~~ interpretados como $(x-3)(x-3)$

es irreducible por ser de grado 2 y no tener raíces en $\mathbb{Q}$ (y por lo tanto tampoco en $\mathbb{R}$).

Bien

④ Hallar todos los $a \in \mathbb{Q}$ tq:

$$f = 3x^4 + (-4a+1)x^3 - (a+1)x^2 - 3x + 11a^2$$

tiene a 'a' como raíz doble.

$$a \text{ es raíz doble} \iff \begin{cases} f(a) = 0 \\ f'(a) = 0 \\ f''(a) \neq 0 \end{cases}$$

Tengo que evaluar en a a f, f' y f'' y ver q' info. me arrojan.

- $\boxed{f(a) = 3a^4 + (-4a+1)a^3 - (a+1)a^2 - 3a + 11a^2 = 0} \iff$

$$\iff 3a^4 - 4a^4 + \cancel{a^3} - \cancel{a^3} - a^2 - 3a + 11a^2 = 0$$

$$\iff \boxed{-a^4 + 10a^2 - 3a = 0}$$

- $f' = 12x^3 + 3(-4a+1)x^2 - 2(a+1)x - 3$

- $f'(a) = 0 \iff 12a^3 + 3a^2(-4a+1) - 2a(a+1) - 3 = 0$

$$\iff \cancel{12a^3} - \cancel{12a^3} + 3a^2 - 2a^2 - 2a - 3 = 0$$

$$\iff a^2 - 2a - 3 = 0$$

$$a_{1,2} = \frac{-b \pm w}{2.a} = \frac{+2 \pm w}{2}, \quad \text{con } w^2 = b^2 - 4.a.c$$

$$w^2 = 4 + 4.1.(-3)$$

$$w^2 = 16 \implies \boxed{w = \pm 4}$$

$$a_{1,2} = \frac{2 \pm 4}{2} \quad \begin{cases} \boxed{a_1 = 3} \\ \boxed{a_2 = -1} \end{cases}$$

$f'' = 36x^2 + 6x(-4a+1) - 2(a+1)$

$f''(a) \neq 0 \iff 36a^2 + 6a(-4a+1) - 2a - 2 \neq 0$

$\iff 36a^2 - 24a^2 + 6a - 2a - 2 \neq 0$

$12a^2 + 4a - 2 \neq 0$

$a_{3,4} = \dfrac{-b+w}{2.a} = \dfrac{-4+w}{24}$

con $w^2 = b^2 - 4ac$

$w^2 = 4^2 - 4.12.(-2) \iff w^2 = 112 \Rightarrow \boxed{w = \pm 4\sqrt{7}}$

$a_{3,4} \neq \dfrac{-4 \pm 4\sqrt{7}}{24}$ para q' $f''(a) \neq 0$

De todos modos, no sirven estas raíces ya q' el enunciado pide $a \in \mathbb{Q}$, y $a_{3,4} \notin \mathbb{Q}$.

Esto quiere decir que $f''(a)$ va a ser siempre distinto de cero (pq' las únicas raíces q' lo anulan no están en $\mathbb{Q}$)

Resumiendo:

a es raíz doble de $f \iff \begin{cases} f(a) = 0 \iff -a^4 + 10a^2 - 3a = 0 \quad (*) \\ f'(a) = 0 \iff a = 3 \lor a = -1 \\ f''(a) = 0 \rightarrow \text{tautológico.} \end{cases}$

$(*)$ $-a^4 + 10a^2 - 3a = 0 \iff a(-a^3 + 10a - 3) = 0$

$\iff a = 0 \lor -a^3 + 10a - 3 = 0$

Recordemos q' se tienen q' cumplir tanto $f(a) = 0$ como también $f'(a) = 0$, entonces, verifiquemos si alguna de las dos raíces q' me da $f'(a) = 0$, verifican la ecuación $(*)$

$\boxed{f(3)} = -3^4 + 10.3^2 - 3.3 = \boxed{0}$ ✓

$f(-1) = -1^4 + 10.(-1)^2 + 3.1 \neq 0$ ✓